Décomposition polaire, application

Chen Thomas
t.chen.thomas1[at]gmail.com

17 mai 2024

Attention

1. Ce document contient certainement des coquilles. N'hésitez pas à me le signaler. De même si vous avez une question.
2. Pour les recasages, ce sont les miens mais ce développement se case peut-être ailleurs et je n'y ai pas réfléchi.
3. Il se peut que ce développement dure plus de 15 minutes. J'ai essayé de le découper pour faire des recollements personnalisés.

Leçons

- 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.
- 154 : Exemples de décompositions de matrices. Applications.
- 157 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
- 158 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

Références

[1] P. Caldero, J. Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries - Tome 1.* Calvage & Mounet, 2017.

[2] R. Mneimné, F. Testard. *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques.* Hermann, 1997.

Attention ! C'est un développement fait maison. On m'a dit que les ouvrages [1] et [2] peuvent aider mais je ne les ai pas lus.

***Proposition* 1** (Racine carrée)**.** Soit E un espace euclidien et u autoadjoint positif (resp. défini positif). Il existe un unique endomorphisme autoadjoint positif (resp. défini positif) v tel que $u = v^2$.

Démonstration. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres pour u et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ des réels positifs valeurs propres associées respectivement aux $e_1, \cdots, e_n$. On définit $v(e_i) = \sqrt{\lambda_i} e_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Alors v convient clairement.

Réciproquement, soit w autoadjoint vérifiant $w^2 = u$. Alors w commute avec u donc laisse stable les espaces propres de u. Regardons w sur $\mathcal{E}_\lambda(u)$. Alors $w_{\mathcal{E}_\lambda(u)}$ est un endomorphisme autoadjoint positif dont le carré vaut $\lambda \mathrm{Id}$. Si cet induit admet une valeur propre, au carré, elle vaut λ_i donc cette valeur propre vaut nécessairement $\sqrt{\lambda_i}$ puisque par positivité de l'induit, les valeurs propres sont positives. Puisque l'induit conserve la diagonalisabilité, on en déduit que $w_{\mathcal{E}_\lambda(u)}$ vaut $\sqrt{\lambda}\mathrm{Id}$. Ainsi, pour tout $1 \leq i \leq n, w(e_i) = v(e_i)$ donc $w = v$ car ils coïncident sur une base. □

Théorème 2 (Décomposition polaire)**.** *Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Il existe un unique couple $(O, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$. De plus, l'application $\varphi : A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mapsto (O, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.*

Démonstration. Analyse. Supposons l'existence d'un tel couple. Alors $A^TA = S^TO^TOS = S^TS = S^2$. Donc S est racine carrée de A^TA qui est inversible. Elle est clairement symétrique positive donc A^TA est symétrique définie positive. Par la proposition précédente, S est la racine carrée de A^TA. Elle est donc inversible et $O = AS^{-1}$. Synthèse. Pour A inversible, on note S, la racine carrée de A^TA et $O = AS^{-1}$. Alors $A = OS$ clairement. S est symétrique définie positive et $O^TO = (AS^{-1})^TAS^{-1} = {S^{-1}}^TA^TAS^{-1} = I_n$ donc O est bien orthogonale.

φ est alors inversible. Pour la continuité de φ, soit $(A_n)_n$ une suite de matrices inversibles qui tendent vers $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On note O_0, S_0 couple de la décomposition polaire. Soit $(O_n, S_n) = \varphi(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors par compacité de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, il existe une extraction φ telle que $(O_{\varphi(n)})_n$ converge dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, disons vers O. Alors $(S_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lim\limits_{n\to+\infty} O_{\varphi(n)}^{-1}A_{\varphi(n)} = O^{-1}A$ et la convergence a lieu dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ qui est fermée, et on note S la limite. Alors $S = O^{-1}A$ et A est inversible donc S aussi. Ainsi, $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et on a bien, par unicité de la décomposition polaire

$$O = O_0, S = S_0.$$

Ainsi, $\varphi(A_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(A)$: φ est continue.

Notons ψ la réciproque. Soit $(O_n)_n \in (\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}, (S_n)_n \in (\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ convergentes, disons respectivement vers O et S. On note $A_n = \psi(O_n, S_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors par produit matriciel, $\psi(O_n, S_n)$ tend vers OS quand $n \to +\infty$ et OS est inversible. Ainsi, $\psi(O_n, S_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mu(O, S)$. ψ est continue. □

Théorème 3. *Soit $n \geq 2$. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes : GL_n^+ et GL_n^-.*

Démonstration. On va déterminer les composantes connexes de $O_n(\mathbb{R})$ qui sont $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$. On va montrer que le premier espace est bien connexe par arcs, la preuve pour le deuxième étant analogue. Pour cela, soit $O \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$. Il existe alors $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}OP = \begin{pmatrix} I_k & & & & \\ & -I_p & & & \\ & & R_{\theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R_{\theta_r} \end{pmatrix}.$$

Puisque le déterminant est 1, k est pair donc on peut noter cette matrice

$$P^{-1}OP = \begin{pmatrix} I_k & & & & & & \\ & R_\pi & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & R_\pi & & & \\ & & & & R_{\theta_1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & R_{\theta_r} \end{pmatrix}.$$

Soit donc

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} I_k & & & & & & \\ & R_{t\pi} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & R_{t\pi} & & & \\ & & & & R_{t\theta_1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & R_{t\theta_r} \end{pmatrix}.$$

Alors $\gamma(0) = I_n, \gamma(1) = P^{-1}OP$ et γ est continue. Par produit matriciel, $t \mapsto P\gamma(t)P^{-1}$ continue de $[0,1]$ dans $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ reliant I_n et $O \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ quelconque : $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

L'application

$$O \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) \mapsto \operatorname{diag}(-1, 1, \cdots, 1) \times O \in \mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$$

est un homéomorphisme donc $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$ est aussi connexe par arcs.

Or, par la décomposition polaire, on a les homéomorphismes $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) \simeq \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R}) \simeq \mathcal{O}_n^-(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ étant connexe et un produit de connexe étant connexe, on a le résultat. $\square$